Moto di un proiettile in 3D

a costante in modulo $= g$

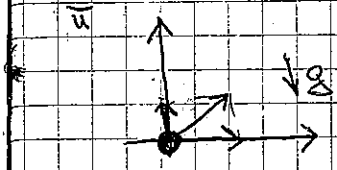
t_0 = istante

z_0 = posizione (all'istante t_0)

v_0 = velocità (all'istante t_0 e nella posizione z_0)

$$\vec{z}(t) = \vec{z}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \quad \text{LEGGE ORARIA}$$

MOTO RETT. UNIFORMEMENTE ACC.



In un piano si scelgono le coordinate che descrivono il mio sistema: (x, y, z) con z uscente

$\vec{g}(0, -g, 0)$

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$ → Componenti $\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + 0 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$

$\vec{z}_0 = (0, 0, 0)$

$\vec{z}(t) = (x_t, y_t, z_t)$

Il moto è PLANARE, la traiettoria giace nel piano (visto che $z(t)$ è costante)

Sull'asse x, il moto è rettilineo uniforme (quella è la direzione perpendicolare a g.)

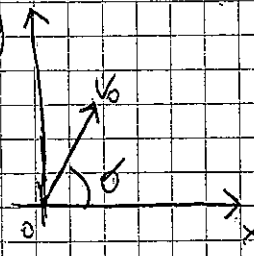
Poniamo O in z_0 (proiettile all'istante iniziale)

$t_0 = 0 \Rightarrow z_0 =$ nell'origine

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t + 0 \\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Analizzo il moto del proiettile nel piano x y.

Le eq. del moto risultano essere:



① $v_{0x} = v_0 \cos\theta$

② $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

TRAIETTORIA: luogo geometrico che viene attraversato da punti

- traiettoria parabolica (Elimino il tempo)

$$y = \tan\theta \, x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta}x^2$$

Parabola è tale che passa per 0 e ammetta come t_{0x} il vettore $\vec{v_0}$

La velocità è tangente la traiettoria. Nel punto di MAX ALTEZZA della curva, la componente in y è nulla.

Non può mai annullarsi la velocità, in quanto la coordinata x non è mai nulla ed è sempre costante. Nel punto di MAX ALTEZZA la velocità è parallela al suolo.

$v_y = 0 \quad t' = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

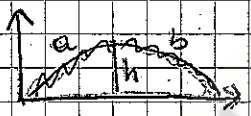
h = massima quota $= y(t') = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha$

- Gittata:

Distanza tra punto di lancio e punto di ricaduta

$t'' = 2t'$

$X(t'') = R$



Il proiettile impiega lo stesso tempo per percorrere a e b

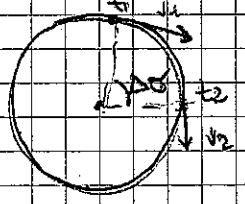
$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha$ = dove esce massimo affinché si ha la massima gittata

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

- Moto circolare:

Moto la cui traiettoria è una circonferenza (curva piana chiusa)



In t_2 la velocità rimane tangente, ma cambia in quanto ci troviamo in un altro punto per cui la direzione è diversa (rispetto a t_1)

v_1 e v_2 sono due vettori distinti, perciò hanno direzioni diverse, però in questo moto hanno uguale modulo $\|\vec{v_1}\| = \|\vec{v_2}\| = v$



$\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1} \qquad \Delta t = t_2 - t_1$

ACCELERAZIONE MEDIA $= \vec{a} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}$

Facendo Δt a zero, $\Delta\alpha$ andrà anche a zero

$\Rightarrow$ l'angolo alla base tenderà a $\frac{\pi}{2}$.

Δv tenderà a decrescere perpendicolare alla velocità

$\Delta t \to 0$, l'accelerazione tenderà a destra istantaneamente.

$\vec{a}$: accelerazione centripeta, radiale, ed ha un verso che punta dalla circonferenza verso il suo centro

modulo: $\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$

$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ → acc. vett. media

se $\Delta\sigma$ tende a 0, $\Delta \vec{v}$ (che potrebbe essere una corda) tende a confondersi con la lunghezza dell'arco (Δs)

$\Delta s = r \cdot \Delta\sigma \rightarrow |\Delta \vec{v}| \cong \Delta s = v \cdot \Delta\sigma$

$\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \cong \frac{v \cdot \Delta\sigma}{\Delta t} \cong \frac{v}{\Delta t} \frac{\Delta s}{r} \cong \frac{v}{r} \left(\frac{\Delta l}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{r}$

$\frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \cong \frac{v^2}{r}$ tende ad eguagliarsi quando $\Delta t = 0$

$a_c = \frac{v^2}{r}$ → ACCELERAZIONE CENTRIPETA → $a_c = \omega^2 r$

$\omega = \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{2\pi}{t}$ → VELOCITÀ ANGOLARE → $v = R\omega$

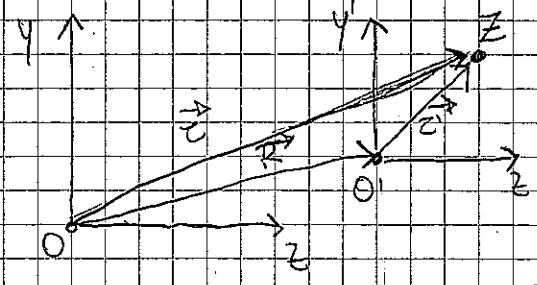
VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA → $\omega = \frac{d\sigma}{dt}$

Sistema di coordinate 11.03.14

TRASFORMAZIONI GALILEIANE

- Sistemi di riferimento in moto traslatorio relativo.

Non cambiano le orientazioni degli assi mentre il centro si muove. Tuttavia vista da due sistemi di riferimento → i due sono paralleli gli assi



$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

↓

I° eq di Galileo

II° eq di Galileo

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\vec{R}(t) + \frac{d}{dt}\vec{r}'(t)$$

- $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$: VELOCITÀ ASSOLUTA, $\vec{V} = \vec{V}_A$
- $\frac{d}{dt}\vec{R}(t)$: VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO, $\vec{V} = \vec{V}_T$
- $\frac{d}{dt}\vec{r}'(t)$: VELOCITÀ RELATIVA, $V_{REL} = V'(t)$

Mette in relazione la velocità assoluta e la velocità relativa mediante la velocità di trascinamento.

$$\vec{V}_A(t) = \vec{V}_T(t) + \vec{V}_R(t)$$

derivate rispetto al tempo

$$\vec{a}_A(t) = \vec{A}_T(t) + \vec{a}_R(t)$$

III° eq di Galileo

in modulo

Moto traslatorio → Moto rettilineo uniforme (con velocità costante)

Se la velocità di trascinamento è costante, la sua accelerazione è nulla.

Se il sistema relativo è in moto rettilineo uniforme rispetto a quello assoluto, l'accelerazione di trascinamento è nulla e le due accelerazioni sono vettorialmente uguali.

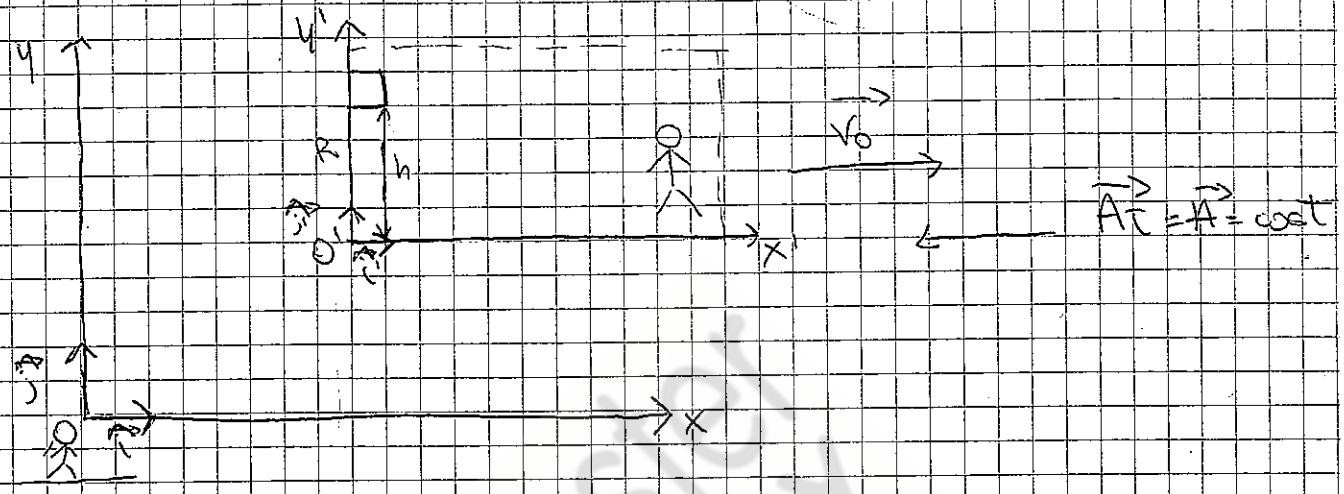
$$\vec{A}_T = 0 \longrightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_R$$

Il tempo nel sistema assoluto è uguale al tempo misurato nel sistema relativo, secondo Galileo, ma, praticamente, non sono uguali.

* Quando il sistema relativo toccherà la velocità della luce, non varranno le leggi galileiane.

es/ Supponiamo di essere su un marciapiede della stazione. Un treno parte bruscamente e la valigia cade in avanti.

Analizziamo il moto della valigia sotto il punto di vista di chi sta sul marciapiede e di un passeggero (vedi prob.)



All'inizio vi è una velocità $\vec{v}_0$. Ad un certo istante vi sarà una accelerazione (decelerazione in questo caso) in modo antiparallela alla velocità $\Rightarrow$ Acc di trascinamento)

(v. A)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t & \text{MOTO RETT UNIFORME} \\ y'(t) = h + 0 - \frac{1}{2} a t^2 & \text{MOTO RETT UNIF. ACC.} \end{cases}$$

La valigia seguirà una traiettoria parabolica.

(a R)

$$\vec{a}_A = (-\vec{A}) + \vec{a}_R \qquad \begin{cases} \vec{a}_A = -a\hat{j} = -a\vec{j} \\ -\vec{A}_T = -A\hat{i} = -A\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{a}_R = A\hat{i} - a\hat{j} \quad \text{Si muove di moto } \cancel{\text{rett}} \text{ unif. acc.}$$

All'istante zero: $x'(t) = \frac{1}{2} a_{Rx} t^2 = \frac{1}{2} A t^2$

$$y'(t) = h + 0 + \frac{1}{2} a_{Ry} t^2 = h - \frac{1}{2} a t^2$$

La traiettoria si ottiene eliminando il tempo dalle due eq.ni

$$y'(t) = h - \frac{1}{2} a \left(\frac{2x'(t)}{A}\right)$$

$$y'(t) = h - \frac{a}{A} x' \longrightarrow \text{la traiettoria è una retta}$$